Lernkontrolle: Lineare Algebra I

1 Aussagenlogik

Seien A, B und C Aussagen, für die $A \implies B$ und $B \implies C$ gilt. Welche der folgenden Aussagen ist dann richtig?

#	Aussage	Wahr	Falsch	Begründung
1	$A \implies C$	☐	☐	
2	$\neg A \implies C$	☐	☐	
3	$\neg A \implies \neg C$	☐	☐	
4	$C \implies A$	☐	☐	
5	$\neg B \implies A$	☐	☐	
6	$\neg B \implies \neg A$	☐	☐	
7	$\neg C \implies A$	☐	☐	
8	$\neg C \implies \neg A$	☐	☐	

2 Mengen

Seien A und B Mengen.

#	Aussage	Wahr	Falsch	Begründung bzw. Gegenbeispiel
9	$\|A \cup B\| = \|A\| + \|B\|$	☐	☐	
10	$\|A \cup B\| = \|A\| + \|B\|$ falls A und B endlich sind	☐	☐	
11	$A \cap B$ endlich $\implies$ A, B endlich	☐	☐	
12	$A \setminus B = \emptyset \implies A = B$	☐	☐	
13	$A \setminus B = \emptyset \implies A = B$ falls A und B endlich sind	☐	☐	
14	$\forall x \in A : x \notin B \implies A \neq B$	☐	☐	

3 Äquivalenzrelationen

Geben Sie, falls möglich, jeweils ein Beispiel für eine Menge X und eine Relation R an, für die folgende Eigenschaften gelten. Falls es nicht möglich ist, begründen Sie warum.
Ordnen Sie zusätzlich die Symbole $=, \neq, \leq, <, \geq, >, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \equiv$ ein.

#	Aussage	Beispiele
15	R ist reflexiv, symmetrisch und transitiv	
16	R ist reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv	
17	R ist reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch	
18	R ist symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv	
19	R ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv	
20	R ist reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch und transitiv	
21	R ist reflexiv und antisymmetrisch, aber nicht transitiv	
22	R ist antisymmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv	

4 Abbildungen

Welche der folgenden Abbildungen ist surjektiv, welche injektiv?

#	Abbildung	sur	inj	Begründung
23	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x$	☐	☐	
24	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x^2$	☐	☐	
25	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x^3$	☐	☐	
26	$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) := x^2$	☐	☐	
27	$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f(x) := x^2$	☐	☐	
28	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := e^x$	☐	☐	
29	$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) := log(x)$	☐	☐	
30	$f : (-\frac{1}{2}\pi, +\frac{1}{2}\pi) \to \mathbb{R}$ $f(x) := tan(x)$	☐	☐	
31	f : Hauskatzen $\to$ Mensch $f(x) :=$ Besitzer(x)	☐	☐	

5 Körper

#	Aussage	Wahr	Falsch	Begründung
32	$\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$: Es gibt einen Körper mit n Elementen.	☐	☐	
33	$\forall p \in \mathbb{N}$ mit $p \geq 2$ und p ist prim: Es gibt einen Körper mit p Elementen.	☐	☐	
34	$\forall p \in \mathbb{N}$ mit $p \geq 2$ und p ist prim: Es gibt einen Körper mit p^2 Elementen.	☐	☐	
35	$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper.	☐	☐	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.
36	$(\mathbb{R}, \cdot, +)$ ist ein Körper.	☐	☐	
37	$(\mathbb{N}, +, \cdot)$ ist ein Körper.	☐	☐	
38	$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein Körper.	☐	☐	
39	$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper.	☐	☐	
40	$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper.	☐	☐	

6 Vektorräume

Im Folgenden wird Vektorraum mit VR abgekürzt. Sei V ein beliebiger VR, $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper und $m, n \in \mathbb{N}$ beliebige natürliche Zahlen.

#	**Aussage**	**Wahr**	**Falsch**	**Begründung**
41	$\mathbb{R}^3$ ist ein VR.	☐	☐	**V1**: **V2**: (a) (b) (c) (d)
42	$\mathbb{K}^n$ ist ein VR.	☐	☐	
43	Die Menge aller $m \times n$ Matrizen mit der üblichen Addition und Multiplikation ist ein VR $(\mathbb{K}^{m \times n}, +, \cdot)$	☐	☐	
44	Sei V die Menge aller unendlicher Folgen. Die Addition und Multiplikation seien komponentenweise definiert. $(V, +, \cdot)$ ist ein Körper.	☐	☐	
45	Für alle VR existiert eine Basis.	☐	☐	
46	Für alle VR existiert genau eine Basis.	☐	☐	
47	Es existiert ein VR, für den genau eine Basis existiert.	☐	☐	
48	Es existiert ein VR, für den unendlich viele Basisen existieren.	☐	☐	
49	Es existiert eine Basis, die unendlich viele Vektoren hat.	☐	☐	
50	Sei V eindimensional. $\forall x \in V$: x ist eine Basis von V.	☐	☐	
51	Eine Basis ist ein Erzeugendensystem.	☐	☐	
52	Basis und Erzeugendensystem sind Synonyme.	☐	☐	
53	Basis und Erzeugendensystem sind Synonyme, falls der VR nicht endlichdimensional ist.	☐	☐	
54	Eine Basis ist eine maximal linear unabhängige Menge.	☐	☐	
55	$\forall u, v, w \in V$ gilt: $u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w$	☐	☐	
56	Jeder Vektor der Form (x, x, x) kann zu einer Basis ergänzt werden.	☐	☐	

7 Lineare Abbildungen

Seien V, W Vektorräume. Sei $\Phi : V \to W$ eine lineare Abbildung.

#	Aussage	Wahr	Falsch	Begründung
57	Φ ist ein VR-Homomorphismus.	□	□	1. 2.
58	Jeder Isomorphismus ist ein Automorphismus.	□	□	Isomorphismus :=
59	Jeder Automorphismus ist ein Isomorphismus.	□	□	Automorphismus :=
60	Jeder Endomorphismus ist ein Isomorphismus.	□	□	Endomorphismus :=
61	$\Phi' V \to V$ ist ein Automorphismus	□	□	

8 Dies und Das

Seien V, W Vektorräume. Sei $\Phi : V \to W$ eine lineare Abbildung.

#	Aussage	Wahr	Falsch	Begründung
62	Jeder Vektorraum hat min. einen Eigenwert bzgl. jeder beliebigen linearen Abbildung.	□	□	
63	Zu jedem Eigenwert hat jeder Vektorraum min. einen Eigenvektor.	□	□	